

# Échecs et maths

Elèves :

*Collège Charles Peguy (Palaiseau) :* RUMIN Sophie 3<sup>ème</sup>, SADJI Rachel 4<sup>ème</sup>, SPIROUX Laure 4<sup>ème</sup>

*Collège Alain Fournier (Orsay) :* DEMORY Pauline, CASSE Clémence, DROUHIN Marie, CUNY Thibaut, KASPERSKI Amélie, AHMANE Tesnime, 3<sup>èmes</sup>.

Enseignants :

Mme FERRY, Mme DAMONGEOT et M. FOURNIER.

Chercheurs :

Aurélien POIRET et Olivier COULAUD.

## Sujet :

*Peut-on parcourir toutes les cases d'un échiquier 8x8 en utilisant la marche classique du cavalier du jeu d'échec sans passer plusieurs fois par la même case ?*

### 1) Déplacement du cavalier.

Sur un jeu d'échec, le cavalier se déplace en L, c'est-à-dire deux cases dans une direction puis d'une case dans une direction perpendiculaire à la précédente.

Si on considère que le cavalier est représenté par la croix, les points représentent ses différents déplacements possibles :

		o		o			
	o				o		
			x				
	o				o		
		o		o			

En commençant nos recherches, nous n'arrivons pas à trouver une solution au problème posé ; nous avons donc étudié des échiquiers d'une taille plus petite.

### 2) Etude d'un échiquier 3x3

Nous avons remarqué qu'il était impossible d'atteindre la case du milieu à partir des autres cases. Si on part des autres cases, il sera facile de remplir toutes celles des côtés mais pas celle du milieu, et si on part du milieu on ne pourra pas en sortir.

1	4	7
6		2
3	8	5

Le problème posé est donc impossible avec un échiquier 3x3.

### 3) Échiquier 4x4.

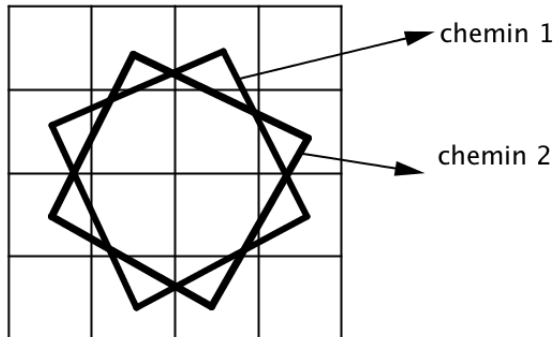
Après de nombreux essais, nous avons conjecturé qu'il était également impossible de remplir un tel échiquier. Nous l'avons ensuite prouvé de deux manières :

- Par un raisonnement.


Nous avons remarqué que les cases des coins ne peuvent être desservies que par les cases du milieu. A un certain moment de notre parcours, on va forcément se retrouver dans une des 2 boucles ( gris clair et gris foncé). A ce moment, on fera probablement un coin et on ressortira par l'autre case du milieu. On aura deux choix : soit faire le coin et dans ce cas on sera bloqué car on aura déjà fait les cases qui permettent de ressortir de ce coin, ou on sortira de la boucle, mais on ne pourra jamais revenir dans ce coin. Dans ce cas-là, il vaut mieux garder cette boucle pour la fin. On ne pourra pas ressortir du coin mais ça ne sera pas grave car on aura terminé l'échiquier.

On peut donc :

- commencer par une des deux boucles.
- puis arriver à une case centrale.
- poursuivre par les cases latérales en remarquant qu'il y a deux chemins.



- terminer par la deuxième boucle et les quatre coins seront ainsi complétés.

Le problème est que pour accéder du chemin 1 au chemin 2, il faut utiliser une des 4 cases centrales qui sont réservées pour la première et la dernière étapes.

Il est donc impossible de compléter un échiquier de 16 cases.

Numérotons les cases dans l'ordre dans lesquelles on passe et illustrons nos remarques :

	11	4	1
3		7	10
8		2	5
	6	9	

13	2	9	
8	5	12	3
	10	1	6
	7	4	11

15	4	9	6
10	7	12	3
1	14	5	8
	11	2	13

-Avec un arbre des possibilités :  
Cet arbre s'est révélé immense mais nous a permis de montrer que le problème avec cet échiquier était impossible.

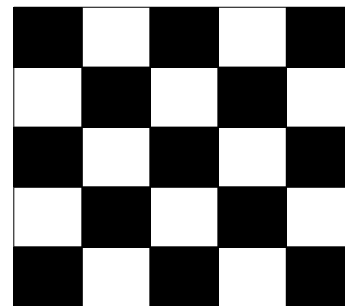
#### 4) Échiquier 5x5.

Nous avons trouvé des solutions, en voici une :

1	14	9	20	3
24	19	2	15	10
13	8	25	4	21
18	23	6	11	16
7	12	17	22	5

Nous nous sommes alors demandé s'il était possible de trouver un chemin fermé, c'est à dire qui revient au point de départ. La réponse est non.

En effet : considérons notre échiquier classique avec des cases blanches et noires alternées.



Lorsque le cavalier se trouve sur une case blanche, la case suivante sera noire ; les couleurs sont ainsi inversées à chaque étape. Il y a 25 cases, 25 est impair, donc la case finale sera de la même couleur que la case de départ. Il est donc impossible de revenir sur la première case. Ce raisonnement reste valable pour tous les échiquiers qui possèdent un nombre impair de cases . Pour ces échiquiers, il n'y a donc pas de chemin fermé.

Regardons maintenant s'il est possible de partir de n'importe quelle case.

Il y a 25 cases dans notre échiquier 5x5 dont ici 13 cases noires et 12 cases blanches.

Si on commence par une case noire on terminera par une case noire et on pourra faire tout l'échiquier (on l'a vu dans notre exemple en partant d'un coin).

Si on commence par contre par une case blanche, on ne pourra faire que 12 cases blanches et 12 cases noires et on terminera ces 24 cases par une case noire, il restera donc une case noire et l'échiquier ne pourra pas être

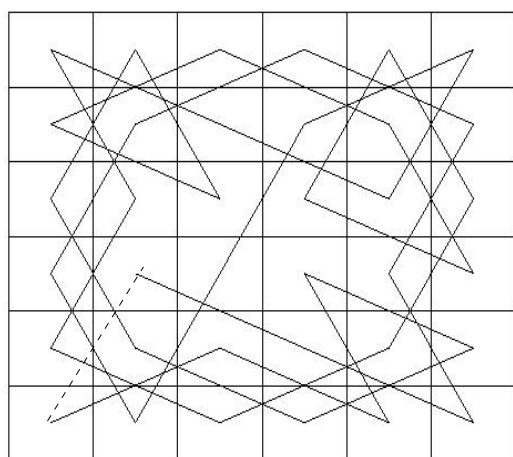
terminé.

Ce raisonnement reste valable pour tous les échiquiers qui possèdent un nombre impair de cases.

Pour l'échiquier 5x5, nous n'avons pas réussi à trouver une solution en partant de la case du milieu d'un côté ; même lorsque nous avons essayé avec un programme dont nous parlerons dans la dernière partie, la recherche n'a pas aboutie. Nous ne savons donc pas si un chemin est possible en partant d'une telle case (qui est pourtant une case noire).

### 5) Échiquier 6x6

Nous avons trouvé une solution à l'aide du logiciel Scilab. Il existe plusieurs solutions.



Nous avons essayé de voir si l'on pouvait de la case d'arrivée rejoindre la case de départ afin de faire une boucle fermée ; nous avons réussi, voici un exemple de chemin fermé. Cela nous démontre également qu'un chemin est possible en partant de n'importe quelle case.

### 6) Échiquier 8x8

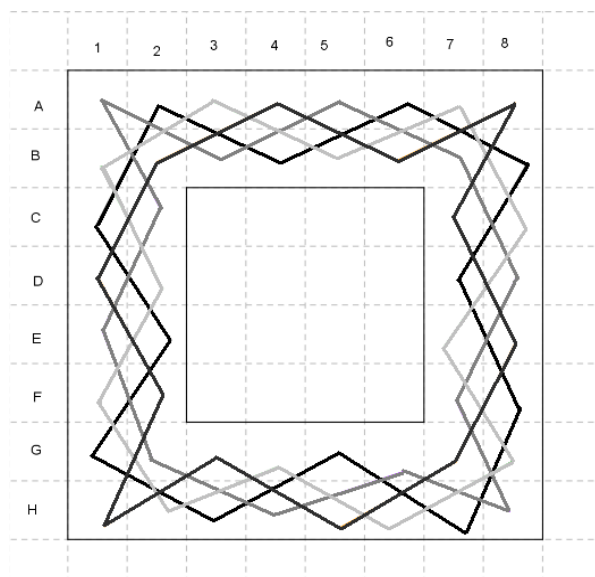
Nous avons tout d'abord trouvé une solution au hasard.

1	28	13	44	3	30	15	46
24	43	2	29	14	45	4	31
27	12	25	42	63	40	47	16
54	23	64	39	60	57	32	5
11	26	55	58	41	62	17	48
22	53	38	61	56	59	6	33
37	10	51	20	35	8	49	18
52	21	36	9	50	19	34	7

Nous avons donc essayé d'établir une stratégie pour compléter l'échiquier sans placer les nombres au hasard.

Nous avons remarqué que dans un échiquier 8x8, nous pouvons faire quatre boucles permettant de compléter toutes les cases en bordure.

Ainsi nous avons pu séparer l'échiquier en deux parties : un carré 4x4 central et une zone en bordure.



De plus le carré central est lui-même constitué de quatre boucles.



En alternant boucle latérale et boucle centrale on réussit à toutes les relier. Voici la solution obtenue :

1	56	25	44	3	58	27	34
24	43	2	57	26	33	4	59
55	12	63	32	45	16	35	28
42	23	46	13	62	29	60	5
11	54	31	64	15	48	17	36
22	41	14	47	30	61	6	49
53	10	39	20	51	8	37	18
40	21	52	9	38	19	50	7

## 7) Programmation

Notre chercheur nous a aidés à faire un programme informatique avec le logiciel Scilab, qui nous permet de tracer le trajet du cavalier lorsque celui-ci est possible (cf. annexe).

L'inconvénient de ce programme est que, pour des échiquiers 7x7 ou 8x8, il prend beaucoup de temps pour trouver une solution (si elle existe) et quand la solution n'existe pas il tourne à l'infini. Il est donc à améliorer...

*NB: Les commentaires sont en italiques.*

*Annexe : Programme informatique :*

*fonction [X,Y]=echechbis(a,b,L,I)*

*// a, le n°de la ligne de départ*

*// b, le n°de la colonne de départ*

*// L, nombre de lignes*

*// l, nombre de colonnes*

`my_handle = scf(100001);`

`clf(my_handle,"reset");`

`j=0,`

`while j==0,`

`x=a,y=b,`

`A=zeros(L,I),`

`A(x,y)=1,`

`i=0,`

`X=[x],Y=[y],`

*// initialisation*

`while i==0,`

`m=0,k=0,`

`while m==0,`

*// tirage au hasard d'un type de déplacement du cavalier (voir première figure)*

`p=1+floor(8*rand(1,1)),`

`if k==20 then`

`i=1,m=1,`

`end`

`if p == 1 then`

*// test: sortirait-on de l'échiquier ?*

`if x+2 > L | y-1 < 1 then`

`k=k+1,`

`else`

*// test: est-on déjà passé par la case ?*

`if A(x+2,y-1)==1 then`

`k=k+1,`

`else`

`m=1,x=x+2,y=y-1,X=[X,x],Y=[Y,y],`

`A(x,y)=1,`

`end`

`end`

`end`

`if p == 2 then`

`if x+1 > L | y-2 < 1 then`

`k=k+1,`

`else`

`if A(x+1,y-2)==1 then`

`k=k+1,`

`else`

`m=1,x=x+1,y=y-2,X=[X,x],Y=[Y,y],`

`A(x,y)=1,`

`end`

`end`

`end`

`if p == 3 then`

`if x-1 < 1 | y-2 < 1 then`

`k=k+1,`

`else`

`if A(x-1,y-2)==1 then`

`k=k+1,`

`else`

`x=x-1,y=y-`

`2,m=1,A(x,y)=1,X=[X,x],Y=[Y,y],`

`end`

`end`

`end`

`if p == 4 then`

```

if x-2 < 1 | y-1 < 1 then
  k=k+1,
else
  if A(x-2,y-1)==1 then
    k=k+1,
  else
    x=x-2,y=y-
1,A(x,y)=1,m=1,X=[X,x],Y=[Y,y],
    end
  end
end
end

```

```

if p == 5 then
if x+1 > L | y+2 > I then
  k=k+1,
else
  if A(x+1,y+2)==1 then
    k=k+1,
  else
    x=x+1,y=y+2,m=1,A(x,y)=1,X=[X,x],Y=[Y,
y],
    end
  end
end

```

```

if p == 6 then
if x+2 > L | y+1 > I then
  k=k+1,
else
if A(x+2,y+1)==1 then
  k=k+1,
else
  x=x+2,y=y+1,A(x,y)=1,m=1,X=[X,x],Y=[Y,
y],
  end
end
end

```

```

if p == 7 then
if x-2 < 1 | y+1 > I then
  k=k+1,
else
  if A(x-2,y+1)==1 then
    k=k+1,
  else
    x=x-
2,y=y+1,m=1,A(x,y)=1,X=[X,x],Y=[Y,y],
    end
  end
end
end

```

```

if p == 8 then
if x-1 < 1 | y+2 > I then
  k=k+1,

```

```

else
  if A(x-1,y+2)==1 then
    k=k+1,
  else
    x=x-
1,y=y+2,m=1,A(x,y)=1,X=[X,x],Y=[Y,y],
    end
  end
end
end

```

```

// test : a-t-on parcouru toutes les cases ?
if sum(A) == L*I then
  j=1,i=1,
end
end
end

```

```

// place les extrémités des segments du parcours
au centre des cases
Z=X-1/2*ones(1,L*I),
T=Y-1/2*ones(1,L*I),

```

```

// tracé de l'échiquier
for ii=0:L
  lx=[ii,ii],ly=[0,I]
  plot2d(lx,ly,rect=[0 0 L I],axesflag=0)
end
for jj=0:I
  cx=[0;L],cy=[jj;jj],
  plot2d(cx,cy,rect=[0 0 L I],axesflag=0)
end

```

```

// tracé du parcours
plot2d(Z,T,rect=[0 0 L I],axesflag=0)

```

```
endfunction
```

*Derniers commentaires des élèves sur le choix de ce sujet :*

Nous avons choisi ce sujet car pour nous il était enrichissant et paraissait très original ; comme on le dit de nos jours, il faut travailler en s'amusant! En lisant ce sujet nous voulions savoir s'il y avait une solution et, si oui, laquelle et pouvait-on la trouver de façon logique ? De plus nous avons pu faire de nouvelles connaissances et échanger avec d'autres élèves.